skolan, men jag anser nyttigt att de *fortfarande försöksvis användas*, på det att erfarenheten må lämna besked om, i hvilken riktning en eventuell omarbetning bör gå.

E. Gn.

P. G. Laurin, Lärobok i geometri för gymnasiet, I, Lund, Gleerup 1905.

P. G. Laurin, Öfningsbok i geometri för gymnasiet, Lund, Gleerup 1906.

§ 1. *Nya moment i geometriundervisningen.* De sträfvanden, som allt från 1800-tale s midt förefunnits, att i de högre skolorna införa *projektiv* eller »*nyare*» *geometri* hafva äfven i *Moebius* och *Steiners* hemland i **allmänhet** ledt till en mycket blygsam praxis: man har inskränkt sig till att tala om harmoniska punkter, transversaler vid trianglar, pol och polar vid cirkeln. *Oftast* har man, af läroböckerna att döma, uraktlåtit att betona det, som är själfva kärnpunkten i den projektiva geometrien nämligen, att vissa egenskaper (projektiva egenskaper) bestå, trots att figurerna förändras. Hr *Laurin* hör till dem, som icke inskränkt sig till att endast upptaga nämnda partier ur den projektiva geometrien, utan han har, om också hufvudsakligen endast antydningsvis, gifvit läsaren en idé om den projektiva geometriens betraktelsesätt.

Hr *Laurin* går emellertid ännu längre. Den genomgående planen i hans böcker är, om jag eljest förstått saken rätt (det hade varit af gagn om förf. i ett förord skizzerat planen för det hela), att upptaga en del viktigare »transformationsgeometrier» eller, som förf. kallar det, *afbildningssätt,* nämligen *1:o Euklides' kongruenta afbildning* och *2:o afbildning i viss skala.* I anslutning härtill införes begreppet perspektivitet, hvarefte *3:o projektiv afbildning* genomgås. Nu stannar förf. i olikhet med de flesta af sina föregångare icke här, utan i öfningsexemplen kommer han *4:o* in på det enklaste fall af cirkeltransformation, *inversion,* nämligen den därmed sammanhängande *stereografiska projektionen* af en klotyta på ett plan (öfningsbok för gymnasiet sid. 43 och 44). Ändtligen behandlas också *5:o koniskt gradnät* som *6:o Mercators gradnät.* Önskvärdt vore, om alla dessa saker kunde komma till sin rätt på *gymnasiet.* Det måste betraktas som en stor förtjänst hos förf., att han icke stannat vid de tre förstnämnda arterna af afbildning, utan också inlåtit sig på det för den matematiska geografien viktiga problemet: att afbilda ett klot på ett plan.

Redan förut har jag anmärkt, att hr *Laurin* börjar förberedelserna för den projektiva geometrien på ett för tidigt stadium, nämligen redan i realskolan. I likhet med hr *Laurin* anser jag, att det är nyttigt att härleda ellipsens egenskaper ganska fullständigt och i ett sammanhang genom att betrakta ellipsen såsom erhållen genom parallellprojektion af en cirkel samt sedermera, så vidt tiden det medgifver, visa att detta betraktelsesätt kan begagnas äfven vid centralprojektion, samt att sålunda vissa af hyperbelns och parabelns egenskaper på samma sätt jämväl kunna härledas ur cirkelns. Härigenom får lärjungen direkt, utan några långa inledande förberedelser en inblick i den projektiva geometriens betraktelsesätt samt skilnaden mellan projektiva och metriska egenskaper. Af allt att döma äro vi ense därutinnan. Men under det att jag praktiserat detta tillvägagående i *7:2* och aldrig medhunnit mera af projektiv geometri, om det må tillåtas mig att begagna det namnet om en så anspråkslös inledning, så tänker sig hr *Laurin* nyssnämnda saker förberedelsevis genomgångna i *realskolan*, på det att lärjungen sedan å gymnasiet skall vara redo att studera den projektiva geometrien mera systematiskt. Slutmålet för hr *Laurins* framställning af den projektiva geometrien blir härledning af fundamentalinvarianten vid projektiv afbildning, nämligen dubbelförhållandet (sid. 48 i öfningsboken för gymnasiet). Först i detta sammanhang, således allra sist, införes af hr *Laurin* principen att begagna sig af olika tecken för sträckor, afsatta åt olika håll, så att det harmoniska dubbelförhållandet får värdet —1. Enligt min mening har »räkning med tecken» kommit in alldeles för sent i hr *Laurins* böcker. Ända från det *Moebius* 1827 gaf ut sitt grundläggande arbete, har denna princip vunnit allmän burskap och visat sig mycket fruktbärande. Se vi på ett svenskt arbete för skolan, finna vi teckenprincipen konsekvent genomförd af *I. Damm* i hans *Inledning till den projektiva geometrien.*[1]) Likaså är fallet i tyska arbeten samt hos *Juel, Analytisk plangeometri*;[2]) men däremot icke hos *Lindelöf* i hans *Analytisk geometri.* — Tilllämpningarna öfverlämnar hr *Laurin* åt lärjungarnas självverk-

[1]) I Årsredogörelsen för allmänna läroverket i Gefle 1906.

[2]) Se denna tidskrift 1905 sid. 144 och följ.

samhet. De förekomma som exempel i öfningsbok för gymnasiet, under det att teorien är tryckt med fin stil i läroboken (del I för gymnasiet).

I de tre sistnämnda geometriska afbildningsmetoderna införes lärjungen helt och hållet genom exemplen. Så har man teorien för *stereografisk projektion* framställd i exemplen 30, 31 och 32 sid. 43 och 44 i öfningsboken för gymnasiet. Detta afbildningssätt är ju mycket enkelt, då sambandet mellan en punkts koordinater i den plana bilden och koordinaterna för motsvarande punkt på sferen blifva uttryckta genom algebraiska relationer.

Ehuru de båda andra afbildningssätten med *koniskt gradnät* och med *Mercators projektion* äro vida mera komplicerade, har förf. upptagit dem redan i öfningsboken för *realskolan* (sid. 74 och följ.) för att sedermera återkomma till dem i del II af sin lärobok för gymnasiet d. v. s. i trigonometrien. Å sid. 48 i sistnämnda bok härledas formlerna för afbildning i ett koniskt gradnät, och koordinaterna för afbildningen bli uttryckta genom trigonometriska funktioner. Förf. antyder också att det i allmänhet ej är praktiskt möjligt att enbart genom konstruktion få fram motsvarande punkter på globen och planet vid denna art af afbildning, utan att räkning blir nödvändig. Under sådana förhållanden bör denna framställning i *sin helhet* uppskjutas till trigonometrien, men lämnar där en god och nyttig tillämpningsöfning.

Däremot är jag mycket tveksam, huruvida lärjungarna kunna göras förtrogna med *Mercators* gradnät utan insikt i elementen af infinitesimalkalkylen. Som nämndt börjar hr *Laurin* behandlingen af detta gradnät också i realskolans öfningsbok sid. 77 samt bevisar här i grund och botten med infinitesimala principer, att afbildningen blir vinkeltrogen, om skalan för förstoringen väljes på lämpligt sätt, olika för hvarje latitud. Redan här anföres en tabell angifvande afstånden mellan parallellcirklarna i *Mercators* gradnät. I trigonometrien återkommer sedan författaren till samma sak och visar i exemplet 36 sid. 60, att om β är latituden, så blir skalan för förstoringen för linjeelement på denna parallelcirkel och vinkelrätt däremot $1 : \cos \beta$. I det följande exemplet angifves sedan en metod att genom interpolation af tillräckligt många termer beräkna afståndet mellan två parallelcirklar i *Mercators* gradnät. En dylik beräkning blir således mycket mödosam, om den skall blifva noggrann, och i en anmärkning framhåller förf., att den i allmänhet ej blir tillfyllest, utan att äfven i den å sid. 79 i öfningsboken för realskolan uppgjorda tabellen är breddskillnaden indelad i ett *oändligt antal delar*. Det synes mig, att dessa saker icke kunna med framgång behandlas, förr än de enklaste elementen af differential- och integralkalkylen införts. Dessförinnan är möjligheten af en indelning i ett »oändligt antal delar» och motsvarande termers summation en fullkomlig gåta för lärjungarna.

Den *transcendenta* funktion, som förmedlar afbildningen i detta fall, är i själfva verket af så komplicerad natur, att den torde vara omöjlig att finna på elementär väg. Man finner nämligen följande relationer mellan koordinaterna för punkterna P_1 och P

$$\begin{cases} x = c\,\varphi \\ y = c \int_0^\beta \frac{d\,\vartheta}{\cos\vartheta} = c \text{ lognat cotg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right), \end{cases}$$

då φ och β äro geografisk längd och bredd för föremålet, punkten P på sferen, samt x och y koordinater för bilden, punkten P_1 på Mercators karta samt *c* jordens radie i den använda skalan. Motsvarande punkter kunna ej heller konstrueras fram på rent geometrisk väg utan måste finnas genom räkning.

Enligt min mening böra således afbildningsmetoderna af sferen på ett plan uppskjutas till gymnasiet. Den *stereografiska projektionen* må meddelas i geometrien såsom en nyttig tillämpning på cirkelinversion. Det *koniska gradnätet* är af gagn att behandla i 7:1 såsom tillämpning på stereometrien och trigonometrien. Teorien för *Mercators gradnät* återigen tror jag icke för närvarande kunna i skolorna med fördel bibringas. I sin atlas har ju också lärjungen den sista afbildningsmetoden endast å världskartorna, och det torde ej vara många, som hafva gjort eller få göra bekantskap med sjökorten.

§ 2. *Om den för gymnasiet afsedda sammanfattningen och utvidgningen af realskolekursen.* Den anmärkning jag förut gjort om framställningen af de irrationella talen i läroboken för realskolan gäller också den, som finnes i läroboken för gymnasiet. I stället för att med ett konkret exempel ådagalägga tillvaron af ett icke rationellt tal, t. ex. en på geometrisk väg konstruerad sträcka, hvars längd ej kan angifvas genom ett rationellt tal, håller sig förf. till en *fingerad* uppmätning af en sträcka, hvarvid *han tänker sig,* att hur länge mätningen än upprepas, återfår jag aldrig samma följd af decimaler. Det är klart, att genom mätning kan man aldrig förvissa sig om tillvaron af ett irrationellt tal eller upptäcka ett sätt att uttrycka ett sådant, utan det måste ha skett genom aritmetiska metoder. Just därutinnan visar sig, så som jag på annat ställe[1]) efter *J. Tannery* framhållit, aritmetikens metoder öfverlägsna geometriens.

Jag kan icke uraktlåta att äfven här uttala min förvåning öfver författarens sats g) sid. 5, att en centrivinkel har samma gradtal som bågen äfven om mätetalet är irrationellt. Det framgår utan »bevis» som ett korollarium af det sätt, hvarpå förf. både här och i boken för realskolan beskrifvit tillvägagångssättet vid vinkelns mätning, att den uppmätes med tillhjälp af en cirkelbåge och dess delar.

En sats, som äfvenledes är komplett onödig, är sats 4 sid. 26. Den borde hellre ha formulerats: om en sträcka delas i ett gifvet förhållande, får hvarje del en bestämd längd. Men nog bör det för en gymnasist vara klart utan något särskildt bevis, att om jag skall dela en sak i t. ex. förhållandet 3:5, blir ena delen $^3/_8$, den andra $^5/_8$ af det hela (eller om delningen skall ske i förhållandet m:n, bli delarna

$$\frac{m}{m+n} \quad \text{och} \quad \frac{n}{m+n}$$

af det hela respektive) d. v. s. att delarnes storlek är entydigt bestämd.

Likformighetsläran är olika den gängse framställningen så till vida, att förf. låter denna afdelning gå före kapitlet om transversaler, hvilket senare bygges på likformighetsläran. Detta medför såsom jag redan förut nämnt en del otrefliga anticipationer. Jag finner det för öfrigt föga tilltalande att (se sid. 8 och 9 i läroboken I för gymnasiet) *först* definiera begreppet *afbildning i viss skala, sedan* definiera *likformighet* samt *därefter bevisa,* att om afbildningen sker såsom det i den första definitionen föreskrifvits, blir den erhållna figuren likformig med den ursprungliga. Begreppet likformighet bör vara fundamentalt. Sedan detta begrepp definierats, framträder osökt problemet att konstruera en figur, som är likformig med en gifven. På sistnämnda sätt finnes ju saken hos alla andra författare, och detta förefaller vara *naturligare.*

---

[1]) Nyare riktlinjer etc. se sid. 5 och 6.

Satserna 31—35 sid. 22 och följ. likasom sats 19 å sid. 57 äro af den art, att de skola inhämtas af alla, och de böra således vara tryckta med grof stil.

§ 3. *Om öfningsboken för gymnasiet.* I de flesta fall äro *anvisningarna* till exemplen fullkomligt öfverflödiga. Oftast innehålla de en fullständig lösning af uppgiften. Jag har det allmänna intrycket, att uppgifterna i gymnasiets öfningsbok äro vida lättare än uppgifterna i realskolans.

Iakttages vissa förändringar särskildt beträffande den ordning, i hvilken en del satser läsas, anser jag dessa böcker ägna sig för gymnasiet. Måhända är kursen något dryg under närvarande förhållanden. En för gymnasiet särskild afpassad framställning af stereometrien är nog nödvändig. Den, som finnes i hr *Laurins* lärobok för realskolan, lämpar sig, så som jag förut betonat icke alls för realskolan, och ej heller synnerligen väl för gymnasiet.

E. Gn.

Genmäle.

Genmäle till lekt. E. Göransson.

Med anledning af den recension af *C. F. Rydbergs Lärobok i plan trigonometri*, som stått att läsa i januarihäftet af *Pedagogisk Tidskrift* för innevarande år, var det först författarens afsikt att inskränka sig till att i korthet påpeka, att vissa af granskarens omdömen hvilade på en oriktig uppfattning af författarens uttalanden i förordet. Men då å andra sidan i en mycket väsentlig punkt, nämligen i fråga om den ordning, i hvilken kartesianska koordinater böra komma till användning i trigonometrien, recensenten och författaren ha alldeles motsatt grunduppfattning och då denna fråga är af allmännare intresse och väl förtjänar att bli föremål för en grundligare pröfning, har författaren trott det kunna vara gagneligt att ingå i ett utförligare bemötande af denna och äfven vissa andra delar af recensionen.